

УДК 550.831

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ТЕХНОЛОГИИ УЧЕТА ГРАВИТАЦИОННОГО ВЛИЯНИЯ ТОПОГРАФИЧЕСКИХ МАСС ДЛЯ ШАРООБРАЗНОЙ ЗЕМЛИ

© 2015 А.С. Долгаль, С.Г. Бычков, А.А. Симанов, В.В. Хохлова

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Горный институт Уральского отделения РАН, Пермь, 614007; e-mail: dolgal@mi-perm.ru*

Для решения прямой задачи гравиметрии предложены алгоритм и технология вычисления радиальной составляющей гравитационного потенциала сферического параллелепипеда, который обеспечивает адекватную аппроксимацию рельефа местности на шарообразной Земле. Основными элементами технологии являются вычисление гравитационного эффекта с помощью адаптивного кубатурного алгоритма, который характеризуется высокой точностью и скоростью вычислений, замена цифровой модели рельефа аналитической и использование сферы Каврайского при преобразовании геодезических координат в геоцентрические.

Ключевые слова: гравиразведка, сферический параллелепипед, прямая задача, численное интегрирование, координаты.

Возможности гравиразведки на современном этапе вступают в противоречие с существующими инструктивными требованиями к ее проведению и обработке полевых данных (Бычков, 2010). Установлено, что даже для съемок на относительно небольших площадях погрешности в аномалии Буге, вносимые устаревшими процедурами редуцирования, во-первых, многократно превышают точность современной гравиметрической съемки, и, во-вторых, могут быть соизмеримы с гравитационными эффектами искоемых геологических объектов (Бычков и др., 2015). Основным недостатком существующих процедур редуцирования первичных (полевых) гравиметрических данных является неучет сферичности Земли при вычислении поправок за промежуточный слой и рельеф местности (то есть при определении влияния топографических масс). Если для вычисления поправок за сферический промежуточный слой существуют точные и приближенные формулы решения прямой задачи гравиметрии для сферического сегмента (Гордин, 1974; Каленицкий, 1981; Ремпель, 1980; LaFehr, 1991), то поправки за влияние рельефа вычисляются по схеме, предложенной еще П.И. Лукавченко (1951). Эта схема, применяемая в настоящее время за рубежом (Kloch, Kryński, 2010; Yamamoto, 2002), предусматривает двукрат-

ное определение поправок с различным набором высот: относительно горизонтальной плоскости, проходящей через гравиметрический пункт, и относительно геоида (эллипсоида), с последующим вычислением разности между ними. В качестве аппроксимирующего тела используется, как правило, прямоугольный параллелепипед (Бычков и др., 2015).

Для решения прямой задачи гравиметрии на сферической поверхности Земли необходимо совершенствовать не только программное обеспечение, но технологию вычислений (Сеначин и др., 2015). Нам представляется, что для аппроксимации топографических масс на шарообразной Земле целесообразно использовать не прямоугольный, а сферический параллелепипед и, соответственно, оперировать не вертикальной составляющей силы притяжения V_z , а радиальной — V_R . Основными требованиями к технологии определения влияния топографических масс являются: использование элементарных тел, наиболее точно аппроксимирующих промежуточный слой и рельеф местности; эффективный алгоритм вычисления радиальной производной V_R гравитационного потенциала для этих тел; быстрое действие и высокая точность получаемых результатов.

Элементарным аппроксимирующим телом для решения прямой задачи гравиразведки

с учетом сферичности Земли может служить сферический параллелепипед (СП) — фрагмент Ω шара радиусом R с центром, совпадающим с началом координат O сферической системы координат $\Sigma r\varphi\lambda$, помещенным в центр Земли (Фихтенгольц, 1963). СП ограничен частями двух сферических поверхностей с радиусами r_1, r_2 и центрами в точке O ; двумя плоскостями, направленными под углами λ_1, λ_2 в экваториальной плоскости и пересекающимися на полярной оси OZ ; двумя коническими поверхностями φ_1, φ_2 с вершиной в точке O . Набор СП, образуя плотную упаковку, адекватно описывает пространственное распределение топографических масс на больших территориях. Кроме того, в глобальных моделях рельефа GTOPO30 и SRTM используются не прямоугольные, а близкие к сферическим геодезические координаты B, L . Производная V_R его гравитационного потенциала для точки P с координатами R, φ_0, λ_0 определяется выражением:

$$V_R(R, \varphi_0, \lambda_0) = \int_{r_1, \varphi_1, \lambda_1}^{r_2, \varphi_2, \lambda_2} (R - r \cos \omega) r_0^{-3} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\lambda \quad (1)$$

где $r_0 = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \omega}$, σ — плотность тела; r, φ, λ — переменные интегрирования,

ω — угол при центре шара между точками P и M : $\cos \omega = \cos \varphi_0 \cos \varphi + \sin \varphi_0 \sin \varphi \cos(\lambda_0 - \lambda)$ (рис. 1). Интеграл (1) не имеет аналитического решения, поэтому для расчета гравитационного эффекта в данном случае приходится прибегнуть к численному интегрированию.

Для решения этой задачи предложен адаптивный смешанный алгоритм, использующий квадратурные формулы Гаусса-Лежандра (Пятаков, Исаев, 2012; Старостенко, Манукян, 1983). Однократное интегрирование (по переменной r), осуществляется аналитически, оставшийся двукратный интеграл решается упомянутым численным методом. Надо сказать, что аналитическое интегрирование заметно усложняет вид подынтегральной функции (в частности, появляется слагаемые, включающие в себя логарифмическую функцию), что неизбежно сказывается на последующей скорости вычисления двойного интеграла по переменным φ и λ .

С учетом требований к точности, быстродействию и устойчивости алгоритмов решения прямых задач (Страхов, 1985), а также исходя из возможностей современных компьютеров, авторами разработано теоретико-программное обеспечение задачи вычисления интеграла (1), основанное на адаптивном кубатурном алгоритме, весьма эффективным при вычислении

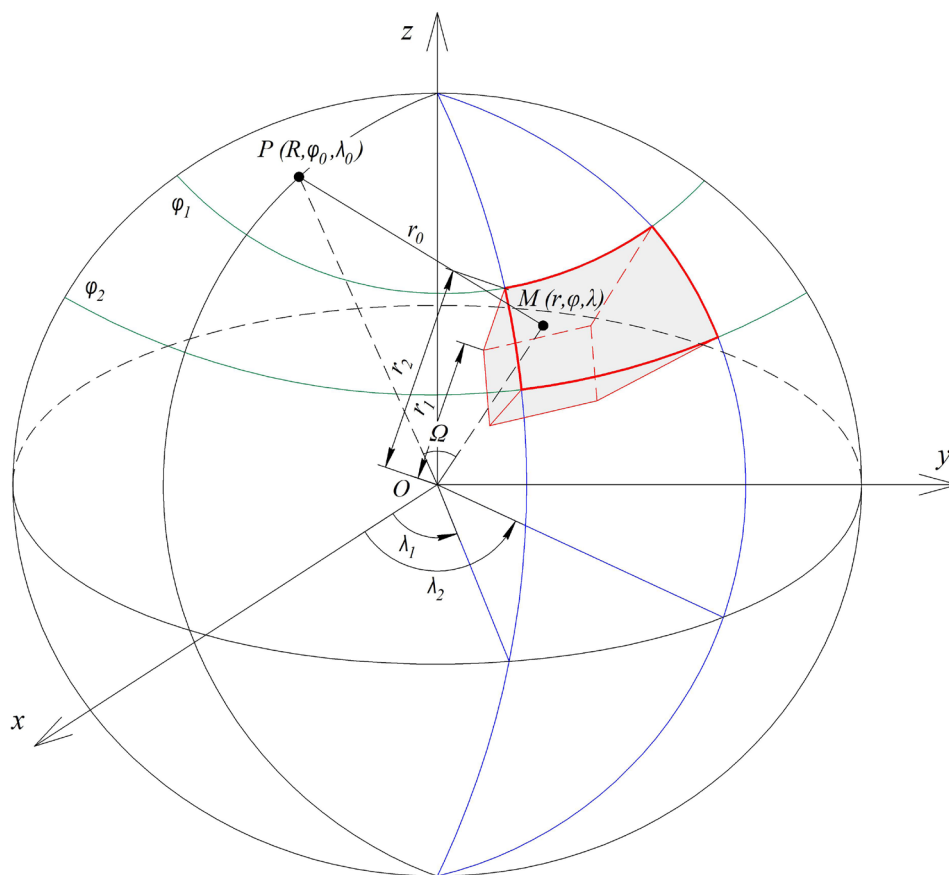


Рис. 1. Сферический параллелепипед.

интегралов от функций с особенностями (Бахвалов и др., 2000).

Примем сокращенные обозначения: $\psi(X)$ — подынтегральная функция в выражении (1), $X = (r, \varphi, \lambda)$, $\Omega = \{r_1 \leq r \leq r_2, \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\}$. Заменой переменных $r = (r_1 + r_2)/2 + t_1(r_1 - r_2)/2$, $\varphi = (\varphi_1 + \varphi_2)/2 + t_2(\varphi_1 - \varphi_2)/2$, $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2 + t_3(\lambda_1 - \lambda_2)/2$, интеграл (1) преобразуется в интеграл по кубу:

$$f\sigma \iiint_{\Omega} \psi(X) dX = f\sigma \iiint_G g(t) dt \quad (2),$$

где $G = \{-1 \leq t_1 \leq 1, -1 \leq t_2 \leq 1, -1 \leq t_3 \leq 1\}$. Для его вычисления предлагаются три кубатурные формулы:

$$\iiint_G g(t) dt \approx Q_q(g), \quad q = 1, 2, 3 \quad (3),$$

$$Q_1 = \frac{8}{225} \left[44g(0,0,0) + \frac{121}{8} \sum_{|i|,|j|,|k|=1} g\left(i\sqrt{\frac{5}{11}}, j\sqrt{\frac{5}{11}}, k\sqrt{\frac{5}{11}}\right) + 10 \sum_{|i|+|j|+|k|=1} g(i, j, k) \right],$$

$$Q_2 = \frac{8}{1225} \left[-\frac{1552}{5} g(0,0,0) + \frac{1573}{40} \sum_{|i|,|j|,|k|=1} g\left(i\sqrt{\frac{5}{11}}, j\sqrt{\frac{5}{11}}, k\sqrt{\frac{5}{11}}\right) + \frac{784}{5} \sum_{|i|+|j|+|k|=1} g\left(i\sqrt{\frac{5}{14}}, j\sqrt{\frac{5}{14}}, k\sqrt{\frac{5}{14}}\right) + 15T \right],$$

$$T = \sum_{|i|,|j|=1} g(i, j, 0) + \sum_{|i|,|k|=1} g(i, 0, k) + \sum_{|j|,|k|=1} g(0, j, k),$$

$$Q_3 = 4/9 Q_1 + 5/9 Q_2.$$

Индексы суммирования i, j, k здесь могут принимать только фиксированные значения: $-1, 0, 1$. Формулы Q_1 и Q_2 являются точными для всех многочленов, со степенью $n \leq 5$, аппроксимирующих функцию $g(t)$; формула Q_3 точна для всех многочленов при $n \leq 7$. Следует заметить, что при вычислении по формулам Q_1 и Q_2 частично используются одни и те же значения переменных интегрирования t , что заметно снижает вычислительные затраты.

Алгоритм численного интегрирования представляет собой итерационный процесс, в котором последовательно увеличивается число подобластей, на которые разбивается область G . Первоначально для этой области осуществляется вычисление интегралов по формулам $Q_1(g)$ и $Q_2(g)$. При выполнении условия

$$\left| \frac{2[Q_1(g) - Q_2(g)]}{[Q_1(g) + Q_2(g)]} \right| \leq 10^{-4} \quad (4)$$

за приближенное значение интеграла принимается величина, вычисленная по формуле Q_3 , являющаяся линейной комбинацией значений, полученных по формулам Q_1 и Q_2 . Если

условие (4) не выполняется, то G разбивается на 2^3 конгруэнтных кубов и данный алгоритм применяется к каждому из этих кубов. Процесс деления продолжается до тех пор, пока условие (4) не будет выполнено. С целью экономии времени желательно начинать вычисление тройного интеграла (2) с разбиения области G сразу на 64 куба. Результаты выполненных вычислительных экспериментов свидетельствуют, что число кубов при вычислении гравитационного эффекта от любого СП может быть ограничено сверху величиной $64^3 = 262144$.

Проведем сопоставление описанного алгоритма вычислений поля СП с вычислительной схемой, приведенной в работе (Старостенко, Манукян, 1983), где имеются представленные в табличной форме результаты расчетов. Рассмотрим одну из представленных в ней задач: вычисление V_R для СП, расположенного по широте φ в интервале $87.5^\circ - 92.5^\circ$, по долготе — в интервале $10^\circ - 15^\circ$, с глубиной верхней кромки 30 км от земной поверхности, с вертикальной мощностью 300 км, обладающего избыточной плотностью $\sigma = 1$ г/см³. Значения гравитационного поля, вычисленного двумя разными способами при одинаковой заданной точности $\varepsilon = 0.05$ мГал, по широтному профилю $\varphi_0 = 12.5^\circ$ близки между собой (рис. 2).

Основные затраты времени при численном интегрировании зависят от скорости вычисления значений подынтегральной функции. Для расчета по формуле (3) число кубов, на которые разбивалась область интегрирования G , изменялось от 64 до 4096 (по 33 значения $g(t)$ в каждом из них). В одной точке определения V_R функция $g(t)$ в среднем вычислялась 3032 раза. Расчет гравитационного поля в $25 \times 25 = 625$ точках был выполнен за 1 секунду (рис. 3). При вычислении двойного интеграла с помощью квадратур Гаусса-Лежандра при той же точности интегрирования ε требовалось уже $32 \times 32 \times 16 = 16384$ значения функции (более сложной, чем $g(t)$).

Рассмотрим частный случай определения гравитационного эффекта V_R для сферического слоя переменной мощности $H = H(\varphi, \lambda)$ на северном полюсе планеты. Выражение (1) теперь принимает следующий вид:

$$V_R(R + h, 0, 0) = f\sigma \iiint_{R, \varphi_1, 0}^{R+H(\varphi, \lambda), \varphi_2, 2\pi} (R - r \cos \omega) r_0^{-3} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\lambda \quad (5)$$

где h — высотная отметка точки расчета, φ_1, φ_2 — угловые величины, характеризующие внутренний и внешний радиусы области учитываемого влияния рельефа D , $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ (рис. 4). Формула (5) является основной для расчета гравитационного влияния масс, расположенных в области D .

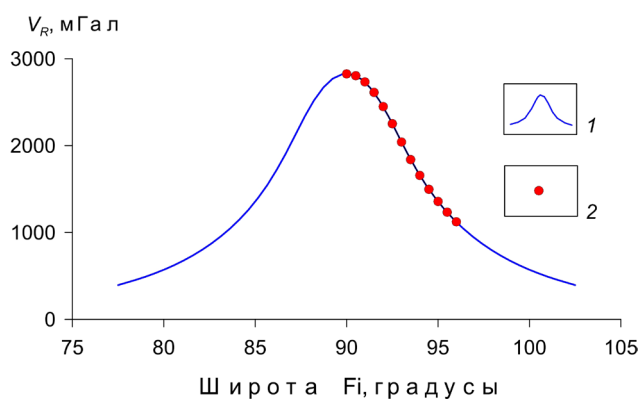


Рис. 2. Сопоставление результатов решения прямой задачи разными методами по широтному профилю АБ: 1 — адаптивный кубатурный алгоритм; 2 — квадратуры Гаусса-Лежандра (Старостенко, Манукян, 1983).



Рис. 3. Решение прямой задачи гравиразведки для сферического параллелепипеда с помощью адаптивного кубатурного алгоритма: 1 — изоаномалы V_R , мГал; 2 — аномалиеобразующий объект; 3 — расчетный профиль $\varphi_0 = 12.5^\circ$.

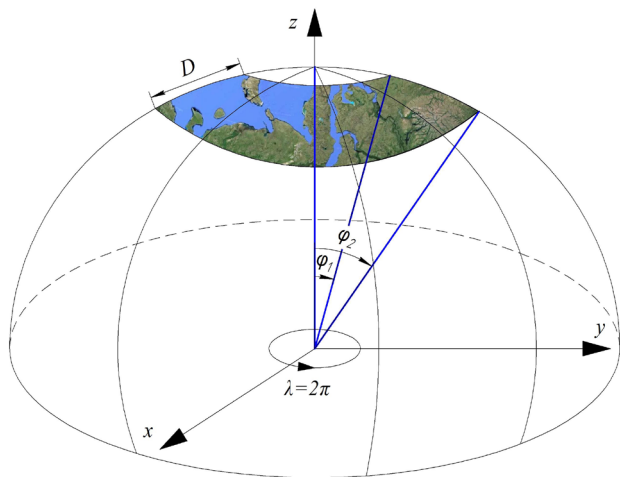


Рис. 4. Сферический слой.

При замене нижнего предела интегрирования R на $R + h$ можно осуществить вычисление поправки за влияние рельефа δg_p для сферической модели Земли. Эффект сферического слоя толщины h (поправка за промежуточный слой) рассчитывается при замене переменного верхнего предела интегрирования на константу $R + h$.

Последний вариант позволяет провести оценку точности представленного алгоритма численного интегрирования на основе сопоставления получаемых результатов с точными аналитическими выражениями для притяжения сферического сегмента, предложенными Г.Г. Ремпелем (Ремпель, 1980) и Т.Р. ЛяФером (LaFehr, 1991) при $\varphi_1 = 0$. С учетом того, что в данном случае $V_R = V_z$ для круговой области D диаметром 400 км ($\varphi_2 \approx 1.8^\circ$) при плотности $\sigma = 2.67 \text{ г/см}^3$ были получены результаты, приведенные в таблице, свидетельствующие о достаточно высокой эффективности вычислительной схемы (2) – (4). Расхождение величин гравитационных эффектов составляет менее 1%.

Успешное практическое применение вычислений по формуле (5) возможно лишь при использовании локальной геоцентрической системы координат с полярной осью, проходящей через гравиметрический пункт. Циклическое (для каждого пункта) преобразование координат цифровой модели рельефа (ЦМР) $H = H(\varphi, \lambda)$ осуществляется путем перехода от исходной сферической системы $\Sigma r\varphi\lambda$ к декартовой ΣXYZ , вращения последней относительно центра Земли и последующего возвращения к новым сферическим координатам (Шикин и др., 1993). Далее необходима интерполяция значений высот H в новую регулярную сеть точек. Такого рода преобразования ранее выполнялись, в частности, при решении обратных задач гравиразведки регионального характера при моделировании глубинного строения Фенноскандии (Глазнев, 2003). В настоящее время, в связи с вычислительными мощностями современных компьютеров, представляется целесообразным построение аналитических аппроксимаций высотных отметок (Bychkov et al., 2015), позволяющих

Оценка точности численного интегрирования.

Высота пункта h , м	Гравитационный эффект V_R , мГал		Относительная погрешность расчета, %
	Аналитические формулы (Ремпель, 1980; LaFehr, 1991)	Численное интегрирование, формула (5)	
100	11.367	11.269	0.86
200	22.727	22.628	0.43
300	34.082	33.986	0.28
400	45.431	45.347	0.18
500	56.774	56.701	0.13

восстанавливать значения H в произвольной точке земной поверхности, расположенной внутри ЦМР (не совпадающей с ее узлами).

Как известно, истинная фигура Земли является геоидом, который при картографических построениях аппроксимируется эллипсоидом вращения. Геодезические координаты относятся к общеземному эллипсоиду, размеры и форма которого определяются значениями большой полуоси и сжатия (для России — ПЗ-90.11). Для получения плоских прямоугольных координат в принятой на территории Российской Федерации проекции Гаусса — Крюгера используются геодезические координаты на эллипсоиде Красовского (ГОСТ Р 51794-2001, 2001). Соответственно, встает вопрос о погрешностях, возникающих при использовании сферической модели Земли для вычисления гравитационных эффектов по формулам (1) и (5).

Известно, что если решать навигационные задачи на поверхности сферы с радиусом $R = 6371.1$ км при замене геодезической широты B и долготы L сферическими координатами φ, λ , то погрешности вычисления расстояний не будут превышать 0.5%, а углов — 0.4%. В работе (Jonson, Litehiser, 1972) на основе вычислительных экспериментов было установлено незначительное различие гравитационных эффектов на сферической и эллипсоидальной Земле, что позволило ее авторам сделать вывод о целесообразности использования шарообразной модели для решения большинства задач гравиметрии.

Более точный переход от геодезических координат к сферическим был предложен В.В. Каврайским (1934):

$$\varphi = B - 8'39'' \sin 2B \quad (6),$$

при $\lambda = L$ и радиусе Земли $R = 6372.9$ км. Использование сферы Каврайского позволяет снизить относительные погрешности в расстояниях до 0.08%, в угловых величинах — до 0.1% (Воздушная ..., 1988).

Проведем сопоставление результатов решения прямой задачи гравиразведки для ранее рассмотренного сферического параллелепипеда (рис. 2, 3) на поверхности шара радиусом $R = 6371$ км и на сфере Каврайского. Разность значений V_R имеет диапазон изменения от -105.2 мГал до 8.3 мГал, при среднем значении 5.9 мГал и среднеквадратическом отклонении ± 14.5 мГал (рис. 5). Максимальная относительная погрешность в амплитудах аномалии достигает почти 10%. Как очевидно, использование преобразования (6) может заметно повысить точность вычисления гравитационных аномалий на шарообразной Земле.

Представленные в статье теоретические материалы и результаты вычислительных экспериментов свидетельствуют, что для учета гравитационного влияния топографических масс на шарообразной Земле необходима компьютерная технология, основными элементами которой являются:

- применение для аппроксимации рельефа земной поверхности набора сферических параллелепипедов, обеспечивающих адекватное описание его основных особенностей;
- вычисление гравитационного эффекта V_R с помощью адаптивного кубатурного алгоритма (2) – (4), характеризующегося высокой точностью и скоростью вычислений;
- замена цифровой модели рельефа аналитической моделью;
- использование сферы Каврайского при замене геодезических координат B, L геоцентрическими φ, λ .

Использование сферического параллелепипеда для учета гравитационного влияния топографических масс на шарообразной Земле позволяет, во-первых, наиболее адекватно аппроксимировать промежуточный слой и рельеф местности, и, во-вторых, отпадает необходимость отдельного определения этих поправок и двойного вычисления влияния рельефа местности. Конечным итогом компьютерной технологии будет являться обеспечение точности определения аномалий силы тяжести в редукции Буге, которая соответствует точности

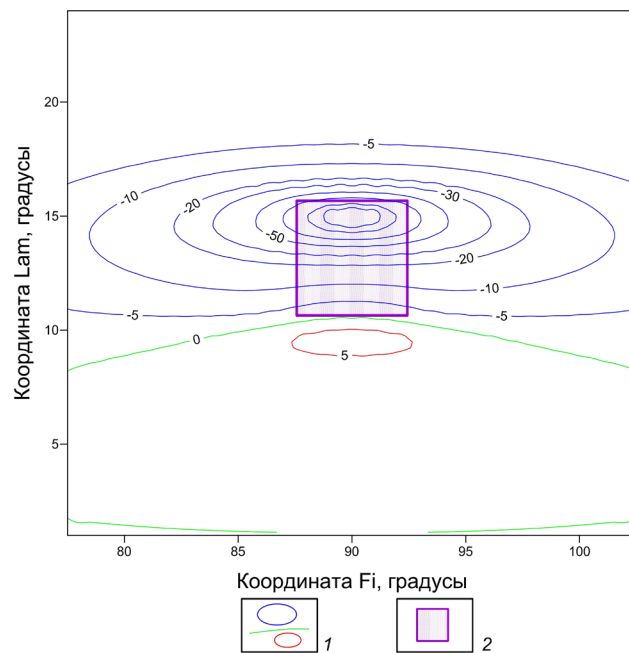


Рис. 5. Различия в значениях силы тяжести, обусловленных сферическим параллелепипедом, вычисленных на поверхности шара и на сфере Каврайского: 1 — изоаномалы разности V_R , мГал; 2 — аномалиеобразующий объект.

современной гравиметрической съемки, необходимой для решения широкого круга прикладных геологических задач.

Работа выполнена при поддержке проекта ОНЗ РАН № 15-18-5-23.

Список литературы

- Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 2000. 622 с.
- Бычков С.Г.* Методы обработки и интерпретации гравиметрических наблюдений при решении задач нефтегазовой геологии. Екатеринбург: УрО РАН, 2010. 187 с.
- Бычков С.Г., Долгаль А.С., Симанов А.А.* Вычисление аномалий силы тяжести при высокоточных гравиметрических съемках. Пермь: УрО РАН, 2015. 142 с.
- Воздушная навигация: справочник / А.М. Белкин, Н.Ф. Миронов, Ю.И. Рублев, Ю.Н. Сарайский. М.: Транспорт, 1988. 303 с.
- Глазнев В.Н.* Комплексные геофизические модели литосферы Фенноскандии. Апатиты: «КаэМ», 2003. 252 с.
- Гордин В.М.* Способы учета влияния рельефа дневной поверхности при высокоточных гравитационных измерениях. Обзор ВИЭМС. Сер. Региональная, развед. и промысл. геофиз. М.: ВИЭМС, 1974. 90 с.
- ГОСТ Р 51794-2001. Системы координат. М.: Стандартинформ, 2001. 14 с.
- Каврайский В.В.* Математическая картография. М.: Редбаза Госкартогостреда, 1934. 276 с.
- Каленицкий А.И., Смирнов В.П.* Методические рекомендации по учету влияния рельефа местности в гравиразведке. Новосибирск: СНИИГиМС, 1981. 174 с.
- Лукавченко П.И.* Таблицы и номограммы для вычисления поправок силы тяжести за рельеф местности при съемке с гравиметрами. М.; Л.: Гостоптехиздат, 1951. 41 с.
- Пятаков Ю.В., Исаев В.И.* Методы решения прямых задач гравиметрии. // Известия Томского политехнического университета. 2012. № 1. Т. 320. С. 105–110.
- Ремпель Г.Г.* Актуальные вопросы введения поправок, связанных с рельефом местности, в данные гравиразведки и магниторазведки // Физика Земли. 1980. № 12. С. 75–89.
- Сеначин В.Н., Лютая Л.М., Сеначин М.В.* Некоторые вопросы гравитационного моделирования на сферической поверхности Земли. // Вестник ДВО РАН. 2015. № 2. С. 43–48.
- Старостенко В.И., Манукян А.Г.* Решение прямой задачи гравиметрии на шарообразной Земле // Физика Земли. 1983. № 12. С. 34–50.
- Страхов В.Н.* О проблеме решения прямых задач гравиметрии и магнитометрии для материально стержня с полиномиальной плотностью // Геофизический журнал. 1985. Т. 7. № 5. С. 3–9.
- Шикин Е.В., Боресков А.В., Зайцев А.А.* Начала компьютерной графики. М.: «ДИАЛОГ-МИФИ», 1993. 138 с.
- Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматгиз, 1963. 656 с.
- Bychkov S.G., Dolgal A.S., Kostitsyn V.I., Simanov A.A.* Gravimetric survey terrain correction using linear analytical approximation // Geophysical Prospecting. 2015. V. 63. № 3. P. 727–739.
- Jonson L.R., Litehiser J.A.* A method for computing the gravitational attraction of three-dimensional bodies in a spherical or ellipsoidal Earth // JGR. 1972. V. 77. № 35. P. 6999–7009.
- Kloch G., Kryński J.* On the determination of the terrain correction using the spherical approach // International Association of Geodesy Symposia. 2010. V. 135. P. 389–395.
- LaFehr T.R.* An exact solution for the gravity curvature (Bullard B) correction // Geophysics. 1991. V. 56. № 8. P. 1179–1184.
- Yamamoto A.* Spherical terrain corrections for gravity anomaly using a digital elevation model gridded with nodes at every 50 m // Journal of the Faculty of Science, Hokkaido University, Ser. VII (Geophysics). 2002. V. 11. № 6. P. 845–880.

ДОЛГАЛЬ и др.

BASIC ELEMENTS OF THE CALCULATION TECHNOLOGY FOR GRAVITATIONAL INFLUENCE OF TOPOGRAPHIC MASSES OF THE SPHERICAL EARTH

A.S. Dolgal, S.G. Bychkov, A.A. Simanov, V.V. Khokhlova

Mining Institute of the Ural Branch of the Russian Academy of sciences, 614007, Perm, Russia

In order to solve the direct problem of gravimetry, the authors propose algorithm and calculation technology of the radial component of the gravitational potential of a spherical parallelepiped, which provides an adequate approximation of the spherical Earth's terrain. The basic elements of the technology includes calculation of the gravitational effect by using an adaptive cubature algorithm, which is characterized by both high accuracy and computing speed; replacement of digital elevation model with analytical model; using the Kavraiskii sphere during transformation from the geodetic coordinates to the geocentric.

Keywords: gravity prospecting, spherical parallelepiped direct problem, numerical integration, coordinates.